Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 65

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

17 de octubre de 2021

1. Usando los potenciales $A^\mu = b^\mu \sin(kx)$, $A^\mu = b^\mu \cos(kx)$, calcular $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

La fórmula para el campo eléctrico es

$$E^i = -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i \tag{1}$$

Sabiendo que b es constante podemos obtener la derivada de $A^\mu = b^\mu \sin(kx)$

$$\partial_\mu A^\nu = b^\nu k_\mu \cos(kx)$$

Por lo que obtenemos el campo eléctrico

$$E^i = -b^0 k_i \cos(kx) - b^i k_0 \cos(kx) = (b^0 k^i - \omega b^i)\cos(kx) \tag{2}$$

Donde $\omega = k^0$. Para el segundo potencial $A^\mu = b^\mu \cos(kx)$ la derivada es

$$\partial_\mu A^\nu = -b^\nu k_\mu \sin(kx)$$

Por lo que el campo eléctrico viene dado por

$$E^i = b^0 k_i \sin(kx) + b^i k_0 \sin(kx) = (-b^0 k^i + \omega b^i)\sin(kx) \tag{3}$$

Para el campo magnético podemos usar la ecuación

$$B^i = \varepsilon_{ijk}\partial_j A^k \tag{4}$$

Usando las mismas derivadas anteriores obtenemos, para el primer potencial

$$B^i = \varepsilon_{ijk} b^k k_j \cos(kx) = -\varepsilon_{ijk} k^j b^k \cos(kx) = (-\vec{k}\times\vec{b})^i \cos(kx) \tag{5}$$

Y para el segundo potencial

$$B^i = -\varepsilon_{ijk} b^k k_j \sin(kx) = \varepsilon_{ijk} k^j b^k \sin(kx) = (\vec{k}\times\vec{b})^i \sin(kx) \tag{6}$$

Que son las mismas ecuaciones que obtiene Javier, en forma vectorial:

$$\boxed{\vec{E} = (b^0\vec{k} - \omega\vec{b})\cos(kx), \qquad \vec{B} = (-\vec{k}\times\vec{b})\cos(kx)} \tag{7}$$

$$\boxed{\vec{E} = (-b^0\vec{k} + \omega\vec{b})\sin(kx), \qquad \vec{B} = (\vec{k}\times\vec{b})\sin(kx)} \tag{8}$$

2. Partiendo de la expresión $A^\mu = \begin{pmatrix}\beta & b^1 & b^2 & \beta\end{pmatrix}\sin(kx)$, demostrar la expansión de A en ondas planas para polarización lineal.

Partiendo del potencial $A^\mu = \begin{pmatrix}\beta & b^1 & b^2 & \beta\end{pmatrix}\sin(kx)$ y expandiendo el seno en función de exponenciales obtenemos

$$A^\mu = \sum_r b^r \varepsilon_r^\mu \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \sum_r \frac{b^r}{2i}\varepsilon_r^\mu e^{ikx} - \frac{b^r}{2i}\varepsilon_r^\mu e^{-ikx} = \sum_r \frac{-b^r}{2i}\varepsilon_r^\mu e^{-ikx} + \left(\frac{-b^r}{2i}\right)^* \varepsilon_r^\mu e^{ikx} \tag{9}$$

Donde usamos la polarización lineal:

$$\varepsilon_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{10}$$

Por lo que vemos, definiendo $c^r = \frac{-b^r}{2i}$ obtenemos la descomposición en ondas planas

$$A^\mu = \sum_r c^r \varepsilon_r^\mu e^{-ikx} + c^{r*}\varepsilon_r^\mu e^{ikx} \tag{11}$$

3. Partiendo de la expresión de A^μ, demostrar la expansión de A en ondas planas para polarización circular.

Partiendo del potencial $A^\mu = \begin{pmatrix}\alpha^0\\ -\frac{E_0}{\omega}\\ 0\\ \alpha^0\end{pmatrix}\sin(kx) + \begin{pmatrix}\beta^0\\ 0\\ \frac{E_0}{\omega}\\ \beta^0\end{pmatrix}\cos(kx)$ y expandiendo el seno y el coseno en función de exponenciales obtenemos

$$A^\mu = \sum_r a^\mu \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} + b^\mu \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} = \sum_r \frac{b^\mu + ia^\mu}{2} e^{-ikx} + \frac{b^\mu - ia^\mu}{2} e^{ikx} \tag{12}$$

Usando ahora polarización circular

$$\varepsilon_0 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\i\\0\end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\-i\\0\end{pmatrix}, \qquad \varepsilon_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{13}$$

Podemos escribir los coeficientes $\frac{b^\mu - ia^\mu}{2}$ en esta base:

$$\frac{b^\mu + ia^\mu}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\beta^0 + i\alpha^0\\ \frac{-iE^0}{\omega}\\ \frac{E^0}{\omega}\\ \beta^0 + i\alpha^0\end{pmatrix} = \frac{\beta^0 + i\alpha^0}{2}\varepsilon_0^\mu - \frac{iE^0}{\sqrt{2}\omega}\varepsilon_1^\mu + 0\varepsilon_2^\mu + \frac{\beta^0 + i\alpha^0}{2}\varepsilon_3^\mu \tag{14}$$

Por lo que vemos, definiendo $c^0 = c^3 = \frac{\beta^0 + i\alpha^0}{2}$ y $c^1 = -\frac{iE^0}{\sqrt{2}\omega}$, $c^2 = 0$, obtenemos la descomposición en ondas planas

$$A^\mu = \sum_r c^r \varepsilon_r^\mu e^{-ikx} + c^{r*}\varepsilon_r^\mu e^{ikx} \tag{15}$$